

臺灣省北區九十二學年度高級中學數學及 自然科能力競賽數學科複賽試題及參考解答

國立臺灣師範大學 數學系

《試題部分》

壹、

一、第一區（花蓮區）複賽試題（一）

【問題一】：考慮平面上一個凸多邊形區域 $P_1P_2P_3 \dots P_n (n \geq 3)$ 。這是一個島國，週邊是海洋。因此，其週邊長 p 就是她的海岸線全長。現在她宣稱與岸邊距離 d 的範圍之內都是她的領海。證明她的領海面積是

$$(p + \pi d)d.$$

有兩個問題要問你：

- (1) 請你完成這問題的證明。(8 分)
- (2) 如果有一個島嶼的形狀恰為圓形，且海岸線總長也是 p ，那麼這島嶼的領海面積比凸 n 邊形島國的領海面積大、相等或
小呢？請你先猜答案，再實際計算是否猜對。(8 分)

【問題二】：設 $a < b$ 。函數 $f(x) = 4 + 2x - x^2$ 在區間 $[a, b]$ 上的最小值為 $2a$ ，最大值為 $2b$ ，求 a, b 之值。(16 分)

【問題三】：在一容器內裝有濃度 10% 的溶液 100 公克，注入濃度為 40% 的溶液 25 公克，均勻攪拌後，再倒出混合液 25 公克。如此反覆進行下去。設 $a_n\%$ 代表稀釋 n 次後，溶液的濃度，並令 $a_0\% = 10\%$ (溶液初始濃度)。

- (1) 求 a_1 的值。(3 分)
- (2) 列出 a_n 與 a_{n+1} 的相關式子。(5 分)
- (3) 求 a_n 的一般公式。(9 分)

二、第二區（花蓮區）複賽試題（二）

1. 用 0、1、…、9 中的三相異數字，拼成一個三位數再除以此三個數的和，試問所得的數值中最小的是 (一)。
2. 某次桌球單打比賽中，原訂每兩位球員恰比賽一場，但有四位球員各比賽了兩場後就退出了，這樣全部比賽只進行了 50 場，則這四位選手之間總共賽了 (二) 場。
3. 設圓 $x^2 + (y - a)^2 = 1$ 與拋物線 $y = 2x^2$ 相切，則 a 的值為 (三)。
4. 福爾摩斯在偵辦一件兇殺案，案發時間據判斷是在半夜十二點至凌晨三點之間，福爾摩斯想從案發現場拾獲的一只手錶準確研判兇殺時間。據判斷，此手錶在案發時，因為經過劇烈的打鬥而損壞停止，指針僅剩下時針，而刻度也僅剩下 12，其他刻度皆已脫落。
福爾摩斯拿隨身攜帶的尺量了一下，時針的長度是 0.5 公分，並順手拿鉛筆在錶的中心沿 12 點的方向 0.8 公分處點一個黑點，再量此黑點與時針的頂點的距離是 0.7 公分。福爾摩斯在草稿紙上算了一下，微笑的說：「我知道精確的案發時間了。」問：案發的時間是凌晨幾時幾分？答：(四)。
5. 下圖是矩形內接一半圓形，且半圓圓弧與矩形的邊相切，則此半圓形的半徑為 (五)。
6. 標準身材的定義是

$$\frac{\text{肚臍高度}}{\text{身高}} = \frac{\text{肚臍距頭頂距離}}{\text{肚臍高度}}$$

有一身高 152 公分，肚臍高度 92 公分的女孩欲借穿高跟鞋來提高身高與肚臍高度，滿足標準身材的定義。試問：該女孩穿多少公分（取最接近的整數）的高跟鞋較恰當。 答：____(六)____。

貳、

一、第二區（台北區）複賽試題（一）

【問題一】：試求滿足下列條件的所有正整數 n ：

(1) n 恰有 6 個正因數： $1, d_1, d_2, d_3, d_4, n$ ；

(2) $1+n=5(d_1+d_2+d_3+d_4)$ 。(16 分)

【問題二】：從 1 到 100 的整數中挑選相異的數形成 n 個集合，滿足下列兩個條件：

(1) 任何兩個集合都沒有共同的元素；

(2) 每個集合中最大元素等於其餘各元素的乘積。

試問： n 最大是多少？並寫出這 n 個集合。

(需說明理由)(16 分)

【問題三】：在凸五邊形 $ABCDE$ 中，若 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA}$ ，而且 \overline{CD} 的中點 M 滿足 $\angle CMB = \angle DME = 45^\circ$ 。試求

(1) $\angle ABC$ 的度數；(9 分)

(2) $\overline{CF}:\overline{CM}$ ，其中 F 是 B 至直線 CD 的垂足。(8 分)

二、第二區（台北區）複賽試題（二）

1. 設 $\triangle ABC$ 中 $\angle B = 2\angle C$ ， $\angle A$ 的平分線交 \overline{BC} 於 D 點，使得 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，則 $\angle A =$ ____ (一) ____。

2. 平面上的格子點到直線 $15x + 20y - 12 = 0$

的最短距離為 ____ (二) ____。(格子點是指兩個坐標都是整數的點)

3. 設 a, b 為正整數且 $a \geq b$ ，滿足 $ab + a + b = 181$ 及 $a^2b + ab^2 = 3900$ 。求 $a^2 - b^2 =$ ____ (三) ____。

4. 坐標平面上有三個圓 A, B 與 C 。圓 A 的圓心為 $(0, a)$ 而半徑為 a ，圓 B 與圓 A 外切且與 x 軸相切於點 $(a, 0)$ ，圓 C 與圓 A, B 都外切且又與 x 軸相切，則圓 C 與 x 軸切點的 x 坐標為 ____ (四) ____。

5. 若 x 是正數，且 $x \neq 4$ ， $x \neq \frac{1}{9}$ ，則 $\frac{4}{4-x} + \frac{9x}{9x-1}$ 的最小值為 ____ (五) ____。

6. 設 a 是實數，方程式 $x^4 - (3+2a)x^2 + 2x + a^2 + 2a = 0$ 的根都是實根，則 a 的範圍為 ____ (六) ____。

7. 以下是一個猜數字遊戲：甲由 0 到 9 的十個數字中任選四個相異數字排成一列（例如 0923），讓乙猜此數。若數字與位置都對者有 n 個，記為 ' nA '；若數字對而位置不對者有 m 個，記為 ' mB '。例如：依上面數字，若乙猜 '1935'，則甲記 '1A 1B'；若乙猜 '1983' 則甲記 '2A 0B'。若乙第一次猜的結果是 '1A 1B'，則乙第二次就猜對此數的機率為 ____ (七) ____。

參、

一、第四區（新竹區）複賽試題（一）

【問題一】：在坐標平面上給定一點 $A(2, 5)$ ，試在直線 $y = x$ 上找一點 P ，使得 $\overline{AP} - \overline{PQ}$ 為最小，其中 Q 為 P 在直線 $2x - 5y = 0$ 上的垂足。請求出 P 點的坐標，並證明之。

【問題二】：試求出所有的正整數 a, b ，使得 $\frac{a^2+b}{ab+1}$ 為正整數。

【問題三】：將 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{48}$ 依順時針方向排列在一圓周上，其中 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{48}$ 為 $1, 2, 3, \dots, 48$ 的一種排列。設 $f(n)$ 表示圓周上從第 n 個數 a_n 開始依順時針方向連續的 16 個數中是偶數的個數。

- (a) 試證： $f(1)f(2)\cdots f(48) \leq 2^{144}$ ；
 (b) 試證：必有一整數 $k \in \{1, 2, 3, \dots, 48\}$ 使得 $f(k) = 8$ 。

二、第四區(新竹區)複賽試題(二)

- 設有兩圓內切，通過小圓的圓心作一直線 $A-B-C-D$ ，分別交大圓於 A, D ，交小圓 B, C ，若 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD} = 2:6:5$ ，則小圓與大圓半徑的比值為 (1)。
- 已知函數 f 滿足： $f(14)=14, f(26)=26$ ，且當質數 p 與 q 滿足 $p > q \geq 2$ 時， $f(pq) = f(p) - f(q) + p + q$ 。則 $f(91) =$ (2)。
- 在 $\triangle ABC$ 中， D 為 \overline{BC} 邊上的中點， $\triangle ABD$ 的內切圓與中線 AD 相切於 M ， $\triangle ACD$ 的內切圓與中線 AD 相切於 N 。若 $\overline{AB}=15, \overline{AC}=10$ ，則線段 $\overline{MN} =$ (3)。
- 平面上過點 $(3,0)$ 且與橢圓 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相切的兩條直線所夾成的銳角為 θ 。則 $\tan \theta =$ (4)。
- 設正數 a, b 滿足 $2ab+3a+6b=27$ ，則 a^2+4b^2 的最小值為 (5)。
- 設 $f(x)$ 為有理係數的三次多項式， $f(1)=2, f(2)=3, f(3)=5$ ，且對任意正整數 $n, f(n)$ 都

是正整數。則 $f(10)$ 的最小可能值為 (6)。

二、第四區(新竹區)複賽試題(二)

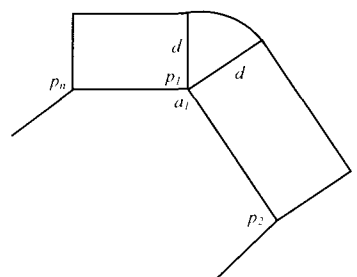
- 設有兩圓內切，通過小圓的圓心作一直線 $A-B-C-D$ ，分別交大圓於 A, D ，交小圓 B, C ，若 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD} = 2:6:5$ ，則小圓與大圓半徑的比值為 (1)。
- 已知函數 f 滿足： $f(14)=14, f(26)=26$ ，且當質數 p 與 q 滿足 $p > q \geq 2$ 時， $f(pq) = f(p) - f(q) + p + q$ 。則 $f(91) =$ (2)。
- 在 $\triangle ABC$ 中， D 為 \overline{BC} 邊上的中點， $\triangle ABD$ 的內切圓與中線 AD 相切於 M ， $\triangle ACD$ 的內切圓與中線 AD 相切於 N 。若 $\overline{AB}=15, \overline{AC}=10$ ，則線段 $\overline{MN} =$ (3)。
- 平面上過點 $(3,0)$ 且與橢圓 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相切的兩條直線所夾成的銳角為 θ 。則 $\tan \theta =$ (4)。
- 設正數 a, b 滿足 $2ab+3a+6b=27$ ，則 a^2+4b^2 的最小值為 (5)。
- 設 $f(x)$ 為有理係數的三次多項式， $f(1)=2, f(2)=3, f(3)=5$ ，且對任意正整數 $n, f(n)$ 都是正整數。則 $f(10)$ 的最小可能值為 (6)。

《參考解答》

壹、

一、第一區(花蓮區)複賽試題(一)

【問題一】：(1)如下圖所示，令凸多邊形區域 $P_1P_2P_3\dots P_n$ 的 P_i 所對應的內角為 α_i 。



領海是由 $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_nP_1$ 為邊向外作寬為 d 的 n 個矩形及頂點 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ 所在外角所圍成半徑 d 的扇形面積總和。

$P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_nP_1$ 為邊向外作寬為 d 的 n 個矩形面積和為

$$(P_1P_2 + P_2P_3 + \dots + P_nP_1)d = pd.$$

頂點 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ 所在外角所圍成半徑 d 的扇形面積和為

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) \frac{\pi d^2}{2\pi} &= (n\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)) \frac{\pi d^2}{2\pi} \\ &= (n\pi - (n-2)\pi) \frac{\pi d^2}{2\pi} = \pi d^2 \end{aligned}$$

【問題二】： $f(x) = 4 + 2x - x^2 = 5 - (x-1)^2$

case 1. 當 $a < b < 1$ 時， f 在 $[a, b]$ 上遞增故最大值為 $f(b) = 2b$ ，最小值為 $f(a) = 2a$

$$\text{即 } \begin{cases} 4 + 2b - b^2 = 2b \\ 4 + 2a - a^2 = 2a \end{cases}$$

解之得 $a = -2, b = -2$ (不合)

case 2. 當 $a < 1 < b$ 時， f 在 $[a, b]$ 上的最大值為 $f(1) = 5$ 由已知 $5 = 2b$ ， $\therefore b = \frac{5}{2}$

$$f(b) = f\left(\frac{5}{2}\right) = 5 - \left(\frac{5}{2} - 1\right)^2 = 5 - \frac{9}{4} = \frac{11}{4} > 2 > 2a$$

故 f 之最小值發生於 $f(a) = 2a$

$$4 + 2a - a^2 = 2a, \therefore a = \pm 2 \quad (\text{取 } a = -2)$$

$$\text{故 } a = -2, b = \frac{5}{2}$$

case 3. 當 $1 < a < b$ 時， f 在 $[a, b]$ 上遞減故最大值為 $f(a) = 2b$ ，最小值為 $f(b) = 2a$ 即

$$\begin{cases} 4 + 2a - a^2 = 2b \\ 4 + 2b - b^2 = 2a \end{cases}$$

解之得 $a = 2, b = 2$ (不合)

$$\text{解答爲： } a = -2, b = \frac{5}{2}$$

【問題三】：

(1) 根據題意

$$a_1 \% = \frac{100 \cdot a_0 \% + 25.40\%}{125} \Rightarrow a_1 = 16.$$

(2) 根據題意

$$a_{n+1} \% = \frac{100 \cdot a_n \% + 25.40\%}{125} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + 8$$

(3) 將 $a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + 8$

$$\text{整理成 } (a_{n+1} - 40) = \frac{4}{5}(a_n - 40).$$

由此關係式得知，數列 $(a_n - 40)$ 是首項為 $a_1 - 40 = 16 - 40 = -24$ ，公比 $\frac{4}{5}$ 的等比數列。

$$\text{故 } a_n - 40 = (a_1 - 40) \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

$$\text{解得 } a_n = 40 + (a_1 - 40) \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

二、第二區（花蓮區）複賽試題（二）

$$(一) \frac{189}{18} \quad (\text{或 } \frac{21}{2}) \quad (二) 3.$$

$$(三) \frac{17}{8} \text{ 或 } -1 \quad (四) \text{二時 } 0 \text{ 分}.$$

$$(五) 5 \quad (六) 5.$$

貳、

一、第二區（台北區）複賽試題（一）

【問題一】：設正整數 n 滿足條件(1)、(2)且

其質因數分解可表示為 $p_n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$

其中 $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k$ 且 p_1, p_2, \dots, p_k 是

相異質數；則它的正因數共有 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1)$ 個。

由條件(1)，則只可能是(i) $k=1$ 且 $\alpha_1=5$ ；或

(ii) $k=2$, $\alpha_1=1$ 且 $\alpha_2=2$ 。若是情況(i)，則

$$n = p^5; \text{ 且由條件(2)可得}$$

$$1+p^5=5(p+p^2+p^3+p^4)=5p(1+p+p^2+p^3)$$

此顯然不可能。若是情況(ii)，則 $n=pq^2$ ，

其中 p, q 為相異質數。由條件(2)可得

$$1+pq^2=5(p+q+pq+q^2);$$

所以，

$$p = 5 + \frac{30q+24}{q^2-5q-5} \quad (a)$$

因為 p 為正整數，所以 $30q+24 \geq q^2-5q-5$ 。

由此可得 $q \leq 35$ 。滿足(a)且不大於 35 的質數

q 可使得 p 亦為質數的只有 $q=7$ ，而此時對應的

$p=31$ 。故， $n=31 \cdot 7^2=1519$ 。

【問題二】：由於每個集合中的元素均相異，

且每個集合中最大的數等於其餘各數之積，

所以每個集合至少含有 3 個數，且每個集合

中最小的數不大於 9，否則此集合中除了最大

的數，其餘各數的積不小於

$10 \times 11 = 110 > 100$ ，矛盾！因而集合的個數

不大於 9。若存在 9 個滿足條件(1)、(2)的集

合，則它們最小的元素分別為 1, 2, ..., 9。考

慮包含 1 的集合，則此集合至少還包含其他

3 個相異的數，所以此集合中第二小的數大

於 9，因而會導致此集合中最大的數大於

100，矛盾！故，滿足條件(1)、(2)的集合至

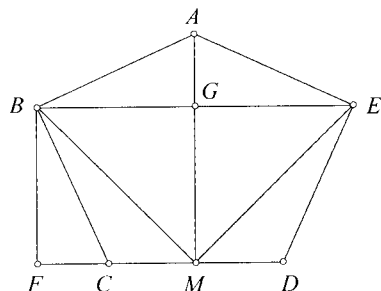
多有 8 個。事實上， $\{2, 17, 34\}, \{3, 16, 48\}, \{4,$

$15, 60\}, \{5, 14, 70\}, \{6, 13, 78\}, \{7, 12, 84\},$

$\{8, 11, 88\}, \{9, 10, 90\}$ 為 8 個滿足條件(1)、(2)

的集合。

【問題三】：



(1) 在等腰三角形 $\triangle CDB$ 中，因為

$\angle CDB < \angle CMB = 45^\circ$ ，所以 $\angle BCD > 90^\circ$ 。

於是， $\triangle CMB$ (與 $\triangle DME$) 是鈍角三角

形。依鈍角三角形的 SSA 全等定理，可知

$\triangle CMB \cong \triangle DME$ ， $\overline{MB} = \overline{ME}$ 。於是， \triangle

MBE 是直角等腰三角形， \overline{BE} 與 \overline{CD} 平行，

\overline{AM} 將 \overline{BE} 垂直平分於 G 。若 B 至直線 CD

的垂足為 F ，則 $\overline{BF} = \overline{GM} = \overline{BG}$ 。依直角三

角形的 SSA 全等定理，可知 $\triangle BCF \cong \triangle$

BAG 。於是， $\angle FBC = \angle ABG$ ，

$\angle ABC = \angle FBG = 90^\circ$ 。

(2) 因為 $\angle BMC = 45^\circ$ ，所以，在三角形 $\triangle BMC$

中引用餘弦定律，得

$$\overline{BM}^2 - 2\overline{BM} \cdot \overline{CM} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \overline{CM}^2 = \overline{BC}^2,$$

$$\overline{BM}^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{AB} \cdot \overline{BM} - \frac{3}{4} \overline{AB}^2 = 0,$$

$$\overline{BM} = \frac{1}{4}(\sqrt{2} \pm \sqrt{14}) \overline{AB} \text{ (應取正號)}。$$

進一步得

$$\overline{CF} = \overline{FM} - \overline{CM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{BM} - \frac{1}{2} \overline{AB} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{14}}{4} \overline{AB} - \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{\sqrt{7} - 1}{4} \overline{AB},$$

$$\overline{CF} : \overline{CM} = (\sqrt{7} - 1) : 2。$$

二、第二區（台北區）複賽試題（二）

(一) 72° 。(二) $\frac{2}{25}$ 。(三) 25。(四) $\frac{2}{3}a$ 或 $2a$ (五) $\frac{12}{5}$ (六) $a \geq \frac{-1}{4}$ (七) $\frac{1}{6!}$

參、

一、第四區（新竹區）複賽試題（一）

1. 令 A' 為 $A(2, 5)$ 對直線 $y=x$ 的對稱點，即 $A'=(5, 2)$ ，則在直線 $y=x$ 上任意一點 P ，恆有 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ ，且 A' 恰好在直線 $2x-5y=0$ 上。若 Q 為 P 在直線 $2x-5y=0$ 上的垂足，則 $\overline{AP} - \overline{PQ} = \overline{A'P} - \overline{PQ} = \overline{A'P} - \overline{PQ} \geq 0$ 。因此，使得 $\overline{AP} - \overline{PQ} = 0$ 為最小，此即 $A'=Q$ 。故 P 點為直線 $5x+2y=29$ 與直線 $y=x$ 的交點。因此，可得 P 的坐標為 $(\frac{29}{7}, \frac{29}{7})$ 。2. 我們將證明所求的解為 $(1, k)$, $(k, k+1)$, (k^2, k) ，其中 k 為任意的正整數。注意： $\frac{a^2+b}{ab+1} \geq 1$ 之充要條件為 $(a-1)(a+1-b) \geq 0$ 。(i) 當 $a=1$ 時， b 可為任意的正整數。經檢驗可知 $(a, b) = (1, k)$ 為滿足條件的解，其中 k 為任意的正整數。(ii) 當 $a \geq 2$ 時， $1 \leq b \leq a+1$ 。若 $b=a+1$ ，則經檢驗可知 $(a, b) = (k, k+1)$ 為滿足條件的解，其中 k 為任意的正整數。若 $1 \leq b \leq a$ ，令 $\frac{a^2+b}{ab+1} = m$ ，則

$$a^2+b = (ab+1)m = abm+m。$$

於是可得， $m \equiv b \pmod{a}$ 。故可令 $m=aq+b$ ，其中 q 為一非負整數；亦即 $a^2+b =$ $(ab+1)(aq+b)$ 。化簡可得 $a=abq+q+b^2$ 。因此，比較兩邊大小可知： $q=0$ ，且 $a=b^2$ 。經檢驗， $(a, b) = (k^2, k)$ 也是滿足條件的解，其中 k 為任意的正整數。3.(a) 注意： $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{48}$ 中有 24 個偶數，每一偶數在計算 $f(1)+f(2)+\dots+f(48)$ 之和
中各重複了 16 次，因此，

$$f(1)+f(2)+\dots+f(48)=24 \cdot 16 = 384。於是，$$

由算幾不等式，可得

$$\prod_{n=1}^{48} f(n) \leq \left(\frac{1}{48} \sum_{n=1}^{48} f(n) \right)^{48} = \left(\frac{384}{48} \right)^{48} = 8^{48} = 2^{144}$$

(b) 若每一個 $f(k) = 8$ ，則證畢；若有一個 $f(k) \neq 8$ ，則由(a)可知：必有一組 m, n 使 $f(m) < 8 < f(n)$ 。不失一般性，可設 $m < n$ 。注意：對每一 k ，恆有 $|f(k+1) - f(k)| = 0$ 或 1。故必存在一 $k \in \{m+1, m+2, \dots, n-1\}$ 使得 $f(k) = 8$ 。(此為整數集上離散型的中間
值定理)

二、第四區（新竹區）複賽試題（二）

(1) $\frac{18}{49}$ (2) 26 (3) $\frac{5}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (5) 18 (6) 131